# "PROFE: ¿ESTO PARA QUÉ SIRVE?"
# UNA MIRADA A LA GEOMETRÍA DEL CONDUCTOR DE TRACTOMULA

**Deisy Delgado, Andrea Castelblanco y Juan Muñoz**
*Secretaría de Educación del Distrito SED*
deisyjohanadel@gmail.com, yandreacc@gmail.com, jufemugar@hotmail.com

Las curvas que son objeto de estudio en este artículo poseen una gran riqueza histórica, debido a que generaron avance del conocimiento en torno a la geometría no euclidiana y revolucionaron el campo de la física. Curvas como la cicloide, la tractriz y la catenaria no se abordan actualmente en los programas curriculares para grado décimo, pues estos centran su atención en la geometría plana, el reconocimiento de funciones trigonométricas y secciones cónicas, como preámbulo al trabajo en el análisis de funciones que se profundiza en el siguiente grado. Dichas curvas abren la puerta para el estudio y análisis de las geometrías no convencionales y sus aplicaciones, que van desde la geometría del conductor de tractomula hasta modelos cuánticos.

## INTRODUCCIÓN

Este escrito se presenta motivado por el interrogante ¿qué tienen en común un perro, un remolque, el universo y un edredón? propuesto por Castellano (2014), y surge con el fin de fortalecer principalmente tres procesos de pensamiento: observación, comparación y relación, de manera que se pueda avanzar a procesos superiores e integradores como clasificación, análisis, síntesis y evaluación. Este objetivo en su desarrollo ha generado el favorecimiento de espacios de reflexión y la conformación de comunidades académicas lideradas por los docentes en aulas de clase donde pensar matemáticamente es una prioridad. Se abordarán las curvas que dan respuesta a los siguientes cuestionamientos:

- Si una cadena se suspende por dos de sus puntos, ¿cuál es la curva que se genera?
- Si un objeto es arrastrado sobre un plano horizontal mediante una cuerda de longitud constante, cuando el extremo libre de la cuerda se mueve a lo largo de una línea recta en el plano, ¿cuál es la curva que describe su movimiento?

Delgado, D., Castelblanco, A. y Muñoz, J. (2017). "Profe: ¿esto para qué sirve?" Una mirada a la geometría del conductor de tractomula. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 57-63). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Según la Figura 1, si se deja caer un objeto desde el punto $A$ ¿En cuál de las tres trayectorias emplea el menor tiempo en llegar al punto $B$?

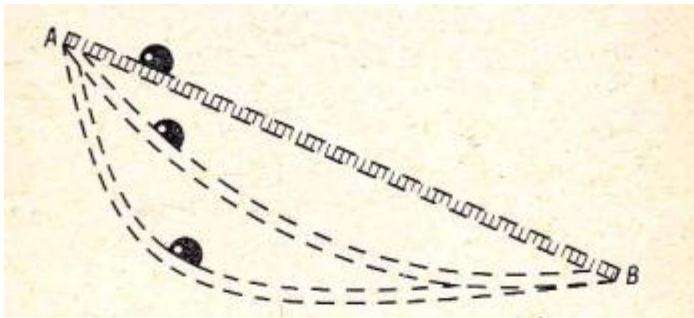


Figura 1. Caída de tres cuerpos en diferentes trayectorias. Disponible en: imagen:http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html

De estas curvas se muestra una perspectiva didáctica de enseñanza que considera situaciones reales, donde pueden observarse algunas de sus aplicaciones para luego describir sus propiedades con apoyo de GeoGebra, con el fin de facilitar la visualización, entendida desde la perspectiva de Cantoral y Montiel (2001) como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende.

## CURVAS CLÁSICAS

Es imposible hablar de las curvas clásicas sin recurrir a las geometrías no euclidianas. Todo surge por el planteamiento del quinto postulado de Euclides y su no tan intuitivo y evidente esbozo, pues no se derivaba de los cuatro restantes. Varios matemáticos se dieron a la tarea de intentar demostrarlo, entre ellos Saccheri y Lambert (Gómez, 2010):

> La comunidad matemática se fue convenciendo de que el postulado de las paralelas era un verdadero postulado y que no se trataba de un teorema, por lo que no requería demostración. Por otro lado, aunque todas las tentativas de demostración habían sido inútiles, tampoco se había probado la falsedad de su negación. La imposibilidad de demostrar el quinto postulado de Euclides encaminó la historia de las matemáticas hacia la concepción de las geometrías no euclideas. (p. 52)

Para mencionar una de las conexiones, se hará referencia a la curva tractriz, la cual permite exponer propiedades de la geometría hiperbólica.

## Cicloide

La trayectoria que describe un punto fijo $P$ sobre una circunferencia que rueda sobre una línea recta es la curva cicloide (Figura 2).

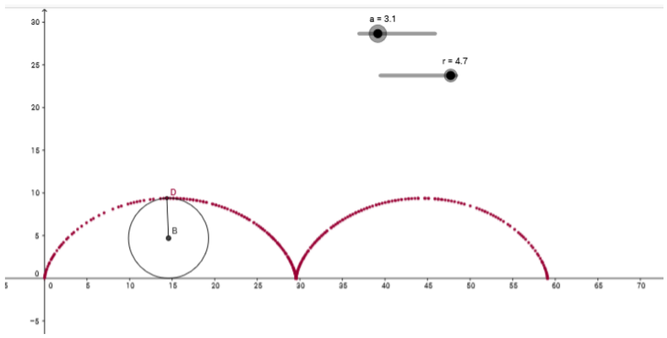

Figura 2. Curva cicloide

Sus propiedades fueron estudiadas por numerosos físicos y matemáticos de gran prestigio. Se dice que fue presentada inicialmente por Nicolás de Cusa, al intentar encontrar el área de un círculo por integración. Marín Mersenne y Galileo Galilei se aproximaron por primera vez a una definición adecuada de la cicloide; este último la nombró en una de sus cartas a Evangelista Torricelli.

Fue tal el interés por la cicloide que dio origen al reconocimiento de propiedades extraordinarias, especialmente en arcos de cicloide invertidos, como el ser:

- Tautócrona o isócrona: el tiempo empleado por una partícula que se desplaza sobre el arco de cicloide para llegar al punto más bajo es independiente de su punto de partida. Christiaan Huygens describió esta propiedad en su *Horologium Oscillatorium*, al intentar construir un reloj de péndulo.

- Braquistócrona: es la curva del descenso más rápido. En el hallazgo de esta propiedad intervinieron Johann y Jacobo Bernoulli, sin embargo, Gottfried Leibniz, Isaac Newton y L´Hôpital demostraron dicha característica la cual dio inicio a problemas variacionales.

Otra característica notable es que la razón entre el área bajo la curva de una cicloide y el círculo generador es de 3 a 1.

## Tractriz

Es la curva que describe un objeto que es arrastrado por otro que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta. Es conocida como "la curva del conductor de tractomula".

En la Figura 3, se observa la trayectoria de un objeto situado en $P$ que es arrastrado por otro situado en $A$. El objeto situado en $A$ se desplaza en línea recta y la distancia entre ambos se mantiene constante.

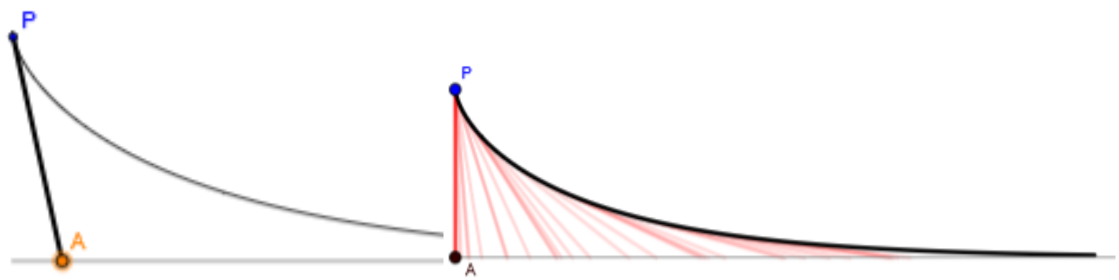


Figura 3. Curva tractriz

El estudio de la curva tractriz permite abordar la geometría hiperbólica, expuesta por Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Beltrami; ellos basan sus axiomas en el estudio del comportamiento de puntos y rectas sobre la superficie de una pseudoesfera (Figura 4), siendo esta última el resultado de rotar una tractriz alrededor de su asíntota.

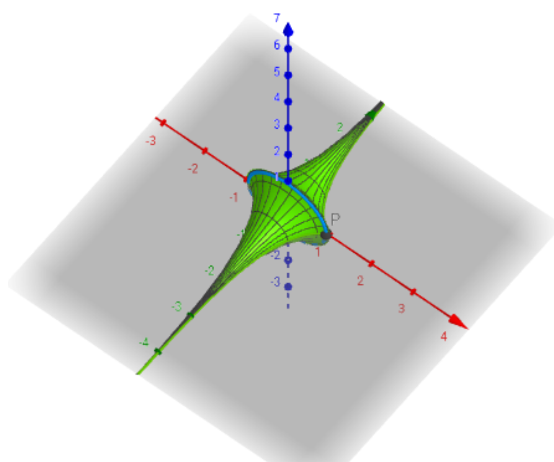


Figura 4. Pseudoesfera (disponible en: https://www.geogebra.org/m/AvQvKzPa)

En la pseudoesfera se identifican propiedades diferentes a las establecidas en la geometría euclidiana. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor a dos rectos, sobre una pseudoesfera las rectas paralelas no son equidistantes en todas sus partes, lo cual constituye el hecho diferencial respecto a la geometría euclidiana (Gómez, 2010) y la idea de recta.

## Catenaria

Esta interesante curva despertó la curiosidad de estudiosos como Galileo Galilei, quien en su momento consideró que era una parábola. Posteriormente, esto fue rebatido por Huygens al constatar que la catenaria, a diferencia de la parábola, no posee tensiones horizontales. Esto llevó a considerar los arcos de catenaria (catenaria invertida) como ideales pues soportan su propio peso.

¿Qué es una curva catenaria? Hemos dado ya algunas pistas al mencionar su gran similitud con una parábola, lo que condujo erróneamente a identificarlas. Sin embargo, su mayor atractivo es la infinidad de situaciones a nuestro alrededor en las que la podemos observar. Imaginemos por un instante a un enamorado que cuelga en el cuello de su amada un collar de perlas, o los separadores en las filas de los bancos, (el banco donde obtuvo el préstamo para comprar el collar), pues es así como se define la catenaria, como la curva que describe una cadena colgada por sus extremos, en un campo gravitatorio uniforme. La Figura 5 muestra la forma como actúan las fuerzas a lo largo de la cadena, la fuerza ejercida hacia la derecha, hacia la izquierda y la gravedad.

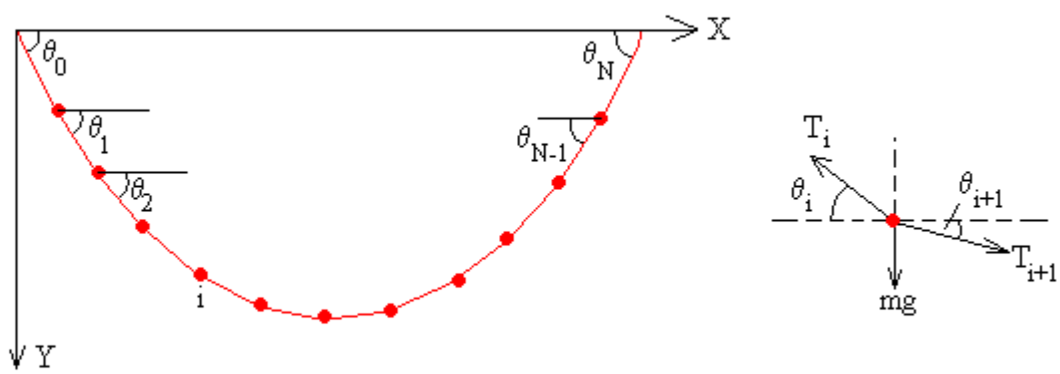


Figura 5. Fuerzas que actúan en la catenaria. Disponible en http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm)

Un análisis posterior de esta curva permite ver cómo su revolución genera la catenoide (Figura 6), una superficie de revolución presentada por Leonhard Euler en 1744 como la primera superficie mínima descubierta.

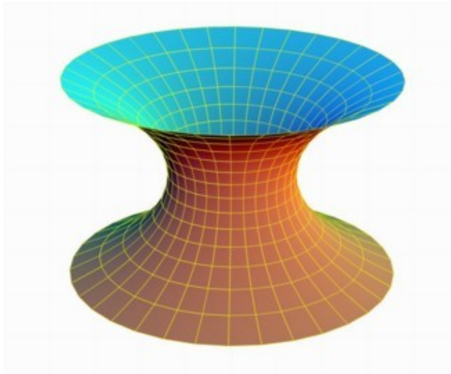

Figura 6. Catenoide. Disponible en
http://www.ugr.es/~jperez/docencia/Evolver/tutorial4.html

## CONCLUSIONES

El uso de las curvas cicloide, tractriz y catenaria proporciona en contextos físicos y matemáticos, herramientas para el estudio de conceptos básicos, aplicaciones elementales y principios intuitivos de la geometría no euclidiana, así como otros aspectos más avanzados de la matemática que se pueden aprovechar en el aula.

Hablar de estas curvas en el aula permite retomar la historia como recurso valioso para su enseñanza, dada la evolución, obstáculos y teorías que surgen a partir del análisis de sus características.

Aunque nuestro propósito no es dar a nuestros estudiantes de secundaria elementos rigurosos de geometría no euclidiana, sí podemos acercarlos a las nociones y cuestionamientos al respecto de algunas de sus propiedades y aplicaciones.

## REFERENCIAS

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J. R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 16, tomo 2, pp. 694-701). Chile: CLAME. Recuperado de:

http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf

Castellano, G. (2014). *Matemáticas: el alfabeto del universo. Divertidas y extravagantes historias para descubrir cómo las matemáticas rigen nuestras vidas*. España: Editorial Guadalmazán.

Gómez, J. (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas*. Barcelona, España: RBA Libros, S.A.